Conociendo propiedades de la Transformada de Fourier mediante la solución de ejercicios

Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

7 de junio de 2024

Consideremos $L^1 = L^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty\}$.

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1$ entonces, su *transformada de Fourier* es la función $\hat{f}$ definida mediante

$$\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Note que $\hat{f}$ es una función acotada. En efecto,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

Consideremos $L^1 = L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$

Transformada de Fourier

Si $f \in L^1$ entonces, su *transformada de Fourier* es la función $\hat{f}$ definida mediante

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Note que $\hat{f}$ es una función acotada. En efecto,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Además, por el Teorema de la Convergencia Dominada, $\hat{f}$ es continua.

Teorema de la Convergencia Dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^1 tal que (a) $f_n \to f$ casi en todas partes, y (b) existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ casi en todas partes, para toda n. Entonces, $f \in L^1$ y $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Propiedades básicas de la Transformada de Fourier

Sea $f \in L^1$.

1. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left[f(x-a)\right] = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)\,, \qquad \mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right] = \hat{f}(\xi - a).$$

2. Si $\delta > 0$ y $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ entonces

$$\left[f_\delta\right]\hat{}(\xi) = \hat{f}(\delta\xi)\,, \qquad \mathcal{F}\left[f(\delta x)\right] = \left[\hat{f}\right]_\delta(\xi).$$

3. Si f es continua, suave a tramos y $f' \in L^1$ entonces

$$\left[f'\right]\hat{}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

   Por otro lado, si $xf(x)$ es integrable, entonces

$$\mathcal{F}\left[xf(x)\right] = i\left[\hat{f}\right]'(\xi).$$

4. Si $g \in L^1$, entonces

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}.$$

Teorema de inversión de Fourier

Sea f integrable y continua a tramos en $\mathbb{R}$, definida en sus puntos de discontinuidad de forma que satisface

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-) + f(x+)\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Además si, $\hat{f} \in L^1$ entonces f es continua y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Corolario

Si $\hat{f} = \hat{g}$ entonces $f = g$.

Si ϕ es la transformada de Fourier de $f \in L^1$, entonces decimos que f es la *transformada inversa de Fourier* de ϕ y escribimos $f = \mathcal{F}^{-1}\phi$. Por el corolario anterior, la operación $\mathcal{F}^{-1}$ está bien definida.

Consideramos el espacio

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \middle|\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

equipado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

De esta forma,

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

Teorema de Plancherel

La Transformada de Fourier, definida originalmente en $L^1 \cap L^2$ se extiende de forma única a un mapeo de L^2 en si mismo que satisface

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = 2\pi \langle f, g \rangle, \qquad \left\| \hat{f} \right\|^2 = 2\pi \| f \|^2, \qquad f, g \in L^2.$$

Además, las propiedades de la Sección 2 siguen siendo válidas para funciones en el espacio L^2.

Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

Consideremos $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$. La *dispersión de f alrededor de a* se define como

$$\Delta_a f := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$$

Desigualdad de Heisenberg

Para cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \hat{f}) \geq \frac{1}{4} \qquad \forall a, \alpha \in \mathbb{R}$$

En mecánica cuántica, una partícula que se mueve a lo largo del eje x se describe mediante una *función de onda* $f(x)$, que es una función en L^2 que toma valores complejos y satisface $\|f\| = 1$. Así, $\int_a^b |f(x)|^2$ se interpreta como la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo $[a, b]$. La condición $\|f\| = 1$ garantiza que la probabilidad total es 1.
De esta forma, la desigualdad de Heisenberg establece una formulación precisa del principio de incertidumbre posición-momento.

Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

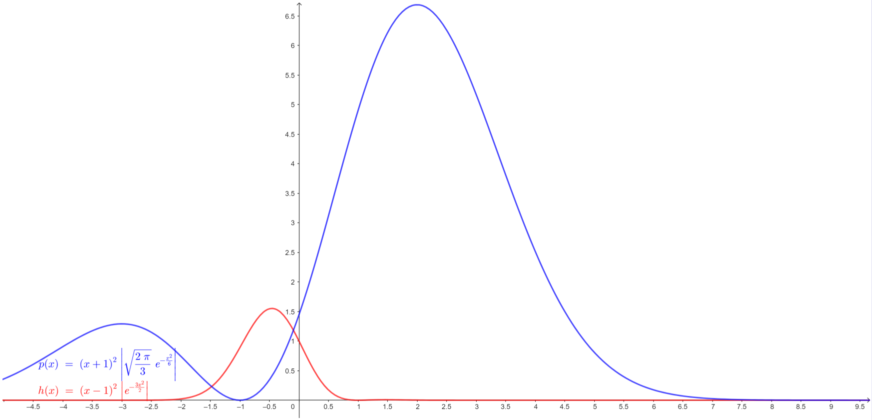

At home with the Heisenbergs
I can't find my car keys.
You probably know too much about their momentum.

$$f(x) = e^{-3x^2/2}$$

$$a = 1$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\xi^2/6}$$

$$\alpha = -1$$



Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

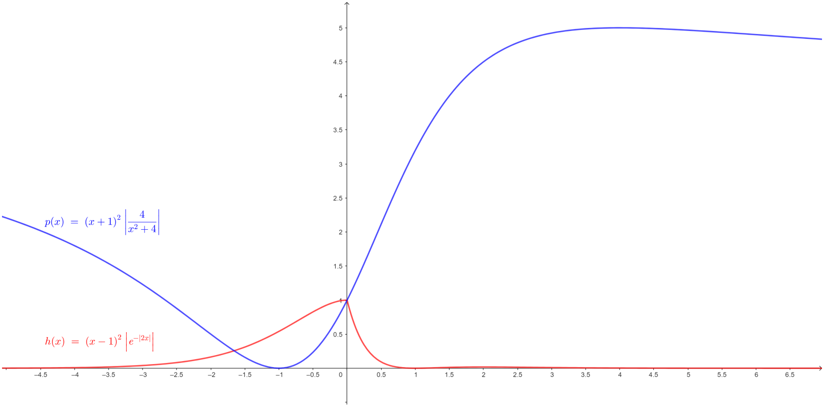
Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

$f(x) = e^{-2|x|}$

$a = 1$

$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{4}{\xi^2+4}$

$\alpha = -1$



Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana

Bibliografía

[1] Folland, Gerald B, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Soc. **4** (2009).

[2] Folland, Gerald B, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons **40** (1999).

Sofía Bustos Aponte
Universidad de Antioquia

Alfredo Uribe Alcántara
Universidad Autónoma Metropolitana